12 SOLENÓIDE E INDUTÂNCIA

12.1 - O SOLENÓIDE

Campos magnéticos produzidos por simples condutores, ou por uma única espira são, para efeitos práticos, bastante fracos. Uma forma de se produzir campos magnéticos com maiores intensidades é através de um solenóide. Um solenóide é um enrolamento helicoidal, conforme é mostrado na figura 12.1.

Considere que o enrolamento possua N voltas igualmente distribuídas ao longo do comprimento L do solenóide. A corrente que flui pelo enrolamento é I A. Se o espaçamento entre uma espira e outra for muito pequeno em relação ao raio de cada espira, podemos substituir o enrolamento por uma lâmina de corrente de densidade:

$$k = \frac{NI}{L} \quad (A/m^2) \tag{12.1}$$

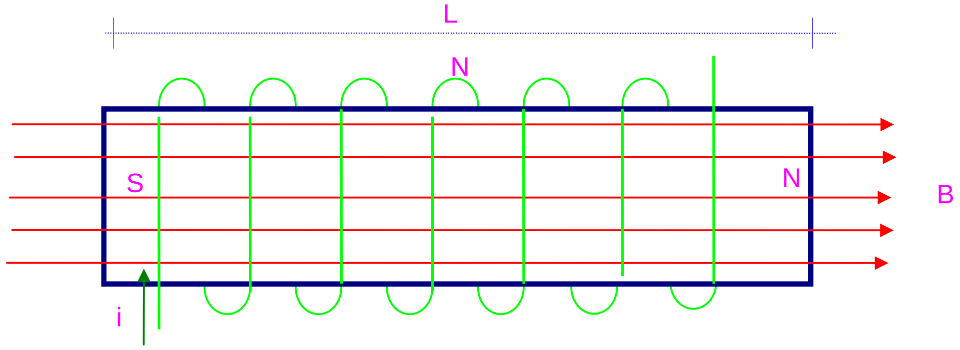

figura 12.1 - Um solenóide

Para achar densidade de fluxo B no centro do solenóide, considere uma seção da lâmina de espessura dx, como se fosse uma única espira, cuja corrente é:

$$I_e = Kdx = \frac{NI}{L}dx \quad (A) \tag{12.2}$$

De acordo com o exemplo M3.1-2, a densidade de fluxo devido a um anel de corrente, ao longo do eixo deste anel em um ponto x é:

$$B = \frac{\mu NIR^2}{2\sqrt{R^2+x^2}^3} \quad (Wb/m^2) \tag{12.3}$$

ou, para o elemento de espessura dx:

$$dB = \frac{\mu NIR^2}{2L\sqrt{R^2+x^2}^3}dx \quad (Wb/m^2) \tag{12.4}$$

A densidade total B no centro do solenóide é, portanto:

$$B = \frac{\mu N I R^2}{2L} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{\sqrt{R^2 + x^2}^3} \quad (Wb/m^2) \tag{12.5}$$

realizando a integração:

$$B = \frac{\mu N I}{\sqrt{4R^2 + L^2}} \quad (Wb/m^2) \tag{12.6}$$

Se o comprimento do solenóide for muito maior do que o seu raio, a expressão 12.6 se reduz a:

$$B = \frac{\mu N I}{L} = \mu K \quad (Wb/m^2) \tag{12.7}$$

onde K é a densidade laminar de corrente em $A.m^{-1}$.

As equações 12.6 e 12.7 dão o valor da indução magnética no centro do solenóide. Mudando os limites de integração para 0 e L, teremos, para os extremos do solenóide:

$$B = \frac{\mu N I}{2\sqrt{R^2 + L^2}} \cong \frac{\mu N I}{2L} = \frac{\mu K}{2} \quad (Wb/m^2) \tag{12.8}$$

que é a metade do valor no centro da bobina.

Vamos agora encontrar torque máximo que tende a girar o solenóide, se este for imerso em um campo magnético B. O torque será máximo se o eixo o solenóide for perpendicular ao campo magnético, conforme é mostrado na figura 12.2.

O eixo de rotação está no centro do solenóide. Supondo que este seja de seção quadrada de largura d, a força tangencial num único segmento de espira é:

$$F_t = IBd\cos\beta \quad (N) \tag{12.9}$$

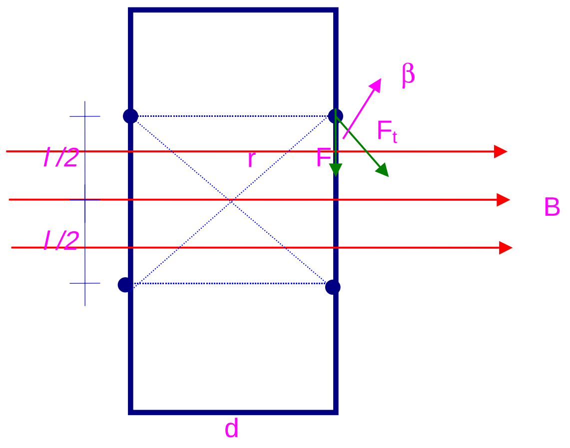

figura 12.2 - Torque no solenóide

mas:

$$\cos\beta = \frac{d}{2r} \tag{12.10}$$

portanto:

$$T = 2Id^2B = 2IAB \quad (N.m) \tag{12.11}$$

onde A = d^2 é a área da seção reta do solenóide. Este torque é independente da distância das espiras ao centro do solenóide. Assim, o torque total será:

$$T_m = \frac{N}{2}2IAB = NIAB = m'B \quad (N.m) \tag{12.12}$$

onde m' = NIA é o momento magnético do solenóide.

Exemplo 12.1

Um solenóide uniforme possui 400 mm de comprimento, 100 mm de diâmetro, 100 espiras e uma corrente de 3 A. Encontre a indução magnética B no eixo do solenóide: a) - no seu centro, b) - em uma extremidade e c) - a meio caminho entre o centro e a extremidade.

Solução

a) -

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\sqrt{4R^2 + L^2}} \quad (T)$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 100 \times 3}{\sqrt{4 \times 0{,}05^2 + 0{,}4^2}} = 0{,}915 \quad (mT)$$

b) -

$$B = \frac{\mu NI}{2\sqrt{R^2 + L^2}} \quad (T)$$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3}{2\sqrt{0{,}05^2 + 0{,}4^2}} = 0{,}468 \quad (mT)$$

c) - Faça-o como exercício.

12.2 - INDUTORES E INDUTÂNCIA

Um indutor é um dispositivo capaz de armazenar energia em um campo magnético. Ele deve ser visto como uma contraparte no magnetismo do capacitor, que armazena energia em um campo elétrico. Exemplos de indutores são espiras, solenóides, toróides etc.

As linhas de fluxo magnetico produzidas pela corrente que percorre o enrolamento de um solenóide formam caminhos fechados. Cada linha de fluxo que passa por todo o solenóide concatena a corrente N vezes. Se todas as linhas se concatenam com todas as espiras, o fluxo magnético concatenado Λ (lambda maiúsculo) é igual a:

$$\Lambda = N\psi_m \quad (Wb.esp) \tag{12.13}$$

Por definição, a indutância L é a razão entre o fluxo concatenado total e a corrente I.

$$L = \frac{N\psi_m}{I} = \frac{\Lambda}{I} \quad (H) \tag{12.14}$$

A definição acima é satisfatória para meios com permeabilidade constante, como o ar. Como será visto mais tarde, a permeabilidade de materiais ferromagnéticos não é constante, e nestes casos a indutância é definida como sendo a razão entre a mudança infinitesimal no fluxo concatenado, pela mudança infinitesimal na corrente.

$$L = \frac{d\Lambda}{dI} \quad (H) \tag{12.15}$$

Indutância tem dimensão de fluxo por corrente, e a sua unidade é Henry (H).

12.2.1 - Indutores de Geometria Simples

A indutância de diversos tipos de indutores pode ser calculada a partir de sua geometria. Como exemplos, as indutâncias de um solenóide longo, um toróide, um cabo coaxial e uma linha formada por dois condutores paralelos serão aqui calculadas.

12.2.1.1 - Indutância de um Solenóide

No seção 12.1 deduzimos uma expressão para o campo magnético no centro de um solenóide. Como foi visto, a indução era menor nos extremos do solenóide, devido à dispersão do fluxo magnético. Se o solenóide for suficientemente longo, podemos considerar que o valor da indução magnetica é constante em todo o interior do solenóide, e igual ao valor em seu centro.

A expressão para a indução magnética no centro de um solenóide muito longo é:

$$\vec{B} = \frac{\mu NI}{d} \quad (Wb/m^2) \qquad (12.16)$$

Utilizamos a letra d ao invés da letra L, para representar o comprimento d solenóide, para evitar confusão com a simbologia de indutância (L).

O fluxo concatenado do solenoide será então:

$$\Lambda = \frac{\mu N^2 IA}{d} \quad (Wb) \qquad (12.17)$$

A indutância será então:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{d} \quad (H) \qquad (12.18)$$

onde:

L	(H)	Indutância do solenóide
I	(A)	Corrente no solenóide
μ	$(H.m^{-1})$	permeabilidade magnética do meio
A	(m^2)	Seção reta do solenóide
d	(m)	Comprimento do solenóide
N		Número de espiras do solenóide

Exemplo 12.2

Calcule a indutância de um solenóide de 2000 espiras, enrolado uniformemente sobre um tubo de papelão de 500 mm de comprimento e 40 mm de diâmetro. O meio é o ar.

12.2.1.2 - Indutância de um toróide

Se um solenóide longo é curvado em forma de círculo, e fechado sobre si mesmo, um toróide é obtido. Quando esse toróide possui um enrolamento uniforme, o campo magnético é praticamente todo confinado em seu interior, e B é substancialmente zero fora dele. Se a relação R/r for muito grande (figura 12.3), podemos utilizar a expressão para o campo magnético em um solenóide para determinar Λ :

$$\Lambda = NBA \quad (H) \tag{12.19}$$

$$\Lambda = N\frac{\mu NI}{d}A = \frac{\mu N^2 I\pi r^2}{2\pi R} \quad (H) \tag{12.20}$$

$$\Lambda = \frac{\mu N^2 r^2 I}{2R} \quad (H) \tag{12.21}$$

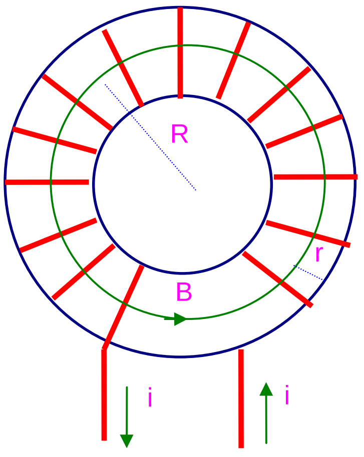

figura 12.3 - toróide

A indutância do toróide será:

$$L = \frac{\mu N^2 r^2}{2R} \quad (H) \tag{12.22}$$

12.2.1.3 - Indutância de um cabo coaxial

Considere agora uma linha de transmissão co-axial, muito utilizada em telecomunicações, conforme mostrado na figura 12.4. A corrente no condutor interno é I, e o retorno pelo condutor externo de mesma magnitude. Consideraremos que o fluxo magnético está confinado à região entre os condutores (B_{ext} = 0). Portanto:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \tag{12.23}$$

O fluxo total concatenado para um comprimento c da linha de transmissão é:

$$\Lambda = d\int_a^b Bdr = \frac{d\mu I}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{d\mu I}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad (Wb) \tag{12.24}$$

A indutância para o comprimento c desse cabo é:

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu d}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad (H) \tag{12.25}$$

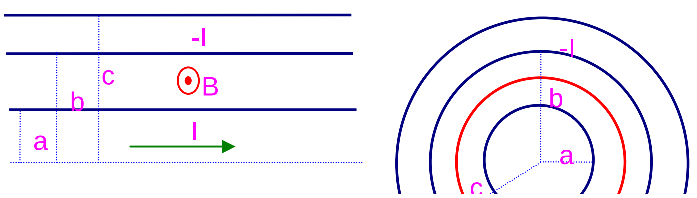

figura 12.4- Cabo co-axial

.

12.2.1.4 - Indutância de um cabo bi-filar

Um outro tipo de linha de transmissão utilizada em telecomunicações é o cabo bi-filar, formado por dois fios paralelos (figura 12.6).O raio de cada um é a, e a distância entre seus centros é D. para um dos fios, em qualquer ponto r a indução magnetica B é dada por:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (Wb / m^2) \tag{12.26}$$

e o fluxo concatenado para um comprimento d será igual à 2 vezes a integral 12.24. portanto indutância para um comprimento d desse cabo é:

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu d}{\pi} \ln \frac{D}{a} \quad (H) \tag{12.27}$$

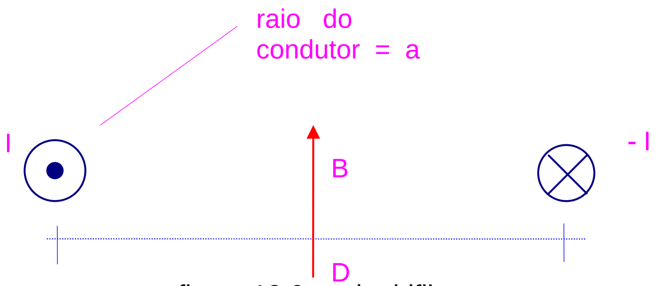

figura 12.6 - cabo bifilar

12.2.2 - Energia Armazenada em um Indutor

Um indutor armazena energia em um campo magnético, analogamente ao capacitor, que armazena energia em um campo elétrico. A armazenagem da energia se dá com a variação do campo magnético. Quando a corrente elétrica é alternada, existe uma permanente troca de energia entre o indutor e a fonte, a medida que o tempo passa. Quando a corrente elétrica é contínua, a energia é armazenada durante o período transitório que ocorre até que o seu valor em regime permanente se estabeleça. Uma vez retirada a corrente, a energia armazenada no campo magnético flui do indutor para a fonte externa, durante o transitório que ocorre até a corrente atingir o valor nulo.

A potência instantânea entregue pela fonte de alimentação ao indutor é dada por :

$$p = V.i \qquad (V.A) \tag{12.28}$$

onde :

V (V) Tensão sobre o indutor, que é igual ao produto $L.{}^{di}\!/_{dt}$.

i	(A)	Valor instantâneo da corrente
p	(W)	Potência instantânea no indutor

A energia entregue pela fonte ao indutor, W_m, é dada por:

$$W_m = \int p dt = \int_0^I Li \frac{di}{dt} dt = \frac{1}{2} LI^2 \quad (J) \qquad (12.29)$$

EXERCÍCIOS

1) - Calcule a indutância por unidade de comprimento de um condutor coaxial com raio interno a = 3 mm, e um condutor externo com raio interno b = 9 mm. Suponha $\mu_r = 1$.

2) - Um solenóide uniforme de 120 mm de diâmetro, 600 mm de comprimento e 300 espiras é percorrido por uma corrente de 5 A. Uma bobina de 400 mm de diâmetro e 10 espiras é colocado com o seu eixo coincidindo com o eixo do solenóide. Qual deve ser a corrente na bobina de tal forma a anular o campo magnético em seu centro se este estiver (a) no centro do solenóide, (b) na extremidade do solenóide e (c) a meio caminho entre o centro e a extremidade do solenóide.

3) - Um toróide com seção transversal quadrada é limitado pelas superfícies r = 3 cm e r = 4 cm, z = -0.5 cm e z = 0.5 cm.O raio médio do toroide é 10 cm. O toróide é enrolado com uma única camada de 700 espiras e excitado com 2,5 A (na direção a_z em r = 3 cm). (a) Encontre a indutância do toroide e $\vec{H}$ no centro do toróide. (b) Como mudará esta resposta se a seção quadrada for reduzida à metade, mantendo o mesmo raio médio do toróide ? (c) Que densidade superficial de corrente fluindo na superfície do cilindro interno será necessária para produzir resultado do ítem (a)?